www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E P F CONCOURS D'ENTRÉE du 23 MAI 1990

ÉPREUVE de MATHEMATIQUES *Durée 4 heures - COEFFICIENT 5*

Sur les 4 exercices proposés, 2 seulement sont à traiter au choix de la candidate.
Attention : Sans indication de votre part, seuls les 2 premiers exercices traités seront corrigés
Dans l'application du barème, on tiendra compte de la clarté et de la précision des figures, et de la qualité des explications . La candidate devra donner les énoncés complets des théorèmes qu'elle sera amenée à utiliser.

Exercice 1

L'unité de longueur choisie dans le plan est le centimètre.
Soit un rectangle ABCD tel que AB = 6 et BC = 4.
Au réel x, on associe le point M tel que $\overrightarrow{CM} = 2x\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB}$.

1° a) Déterminer l'ensemble E des réels x pour lesquels M existe.

b) Préciser le point M lorsque x = 0.

c) Construire géométriquement le point M lorsque x = 1.
On désigne par I ce point.

2° a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque x décrit l'ensemble E.

b) Préciser l'ensemble des points M lorsque $x = e^t$ et t décrit $\mathbb{R}$.

c) Préciser l'ensemble des points M lorsque x = sin t et t décrit $\mathbb{R}$.

3° Déterminer l'ensemble des points M tels que
$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$, k réel strictement positif donné.
Représenter cet ensemble pour k = 56.

Exercice 2

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle A et B les points d'affixes respectives *i* et 2 (où *i* est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

1° a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z telle que

$$(1-2i)z + (1+2i)\bar{z} = 4$$

($\bar{z}$ est le complexe conjugué de z)

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle que

$$(z-i)(\bar{z}+i) = 4$$

2° Soit f, l'application qui, à tout point M d'affixe z, $(z \neq i)$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2\bar{z}}{\bar{z}+i}$

a) Vérifier que $z'-2 = \dfrac{-2i}{\bar{z}+i}$

En déduire que $M'B = \dfrac{2}{MA}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = (\vec{v}, \overrightarrow{AM})$

Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'})$

b) (Δ) et (Γ) ont deux points communs M_1 et M_2

Représenter sur une même figure :
(Δ), (Γ), f(Γ), M_1, M_2, f(M_1), f(M_2).

ECOLE POLYTECHNIQUE FEMININE

Exercice 3

On considère un carré ABCD de côté 6 cm, E est le milieu du segment [AB], F celui de [CD]. Sur le segment [EF] on considère le point H tel que EH = 2 cm. Sur la perpendiculaire en H au plan (ABCD) on considère le point S tel que SH = 6 cm.

1°) Représenter la pyramide SABCD et calculer SA.

2°) Sur le segment [SA] on considère le point I tel que SI = 2 cm et sur le segment [SB] le point J tel que SJ = 5 cm.

Déterminer la position sur la droite (AB) du point K intersection des droites (IJ) et (AB) (on pourra représenter le triangle SAB en grandeur réelle et calculer KA ou KB).

3° a) Représenter sur la figure faite à la première question les intersections du plan (IJF) avec les différentes faces de la pyramide, en justifiant les tracés faits.

b) On appelle L le point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJF).

Calculer $\frac{BL}{BC}$

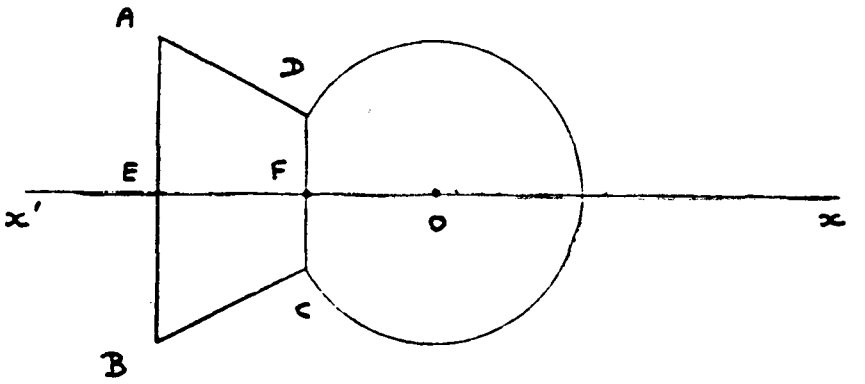
La droite (JL) est-elle parallèle à (SC) ?

Exercice 4

On considère une plaque métallique représentée par la figure ci-contre. Elle admet la droite (x'x) pour axe de symétrie.

ABCD est un trapèze isocèle.
AB = 4 CD = 2 EF = 2

L'arc de cercle de centre O a pour rayon 2 (OD = OC = 2).
L'unité de longueur est le centimètre.
En tournant autour de (x'x) cette plaque engendre un solide dont on demande de calculer le volume.



PROBLEME

Partie I

Soit f la fonction numérique telle que, pour tout $x < 1$, $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

et, pour tout $x \geq 1$, $f(x) = 0$

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de f en x = 1.

2° Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3° Tracer (C), la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie II

Soit g la fonction numérique telle que,pour tout $x < 1$, $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$

et, pour tout $x \geq 1$, $g(x) = 0$

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de g en x = 1.

2° Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et tracer (Γ), la représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité 4 cm).

3° Justifier l'existence de G, la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 et déterminer l'expression de G(t) en fonction de t.
Interpréter géométriquement G(1).
Calculer la limite de G en $-\infty$ et en donner une interprétation géométrique.

Partie III

On appelle (H) la courbe d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Le but de cette partie est de déterminer l'intersection de (C) et (H).

1° a) Démontrer que (C) et (H) ont un unique point commun A.
b) On appelle (α, β) les coordonnées de A.
Vérifier $\alpha = 1 - \frac{1}{\beta^2}$ et $e^{-\beta^2} = \beta$

2° Pour déterminer A, on cherche à résoudre l'équation $e^{-x^2} = x$.

a) Soit h, la fonction numérique telle que, pour tout x réel, $h(x) = e^{-x^2}$
Etudier les variations de la fonction $x \longmapsto h(x)-x$ et en déduire que l'équation $h(x) = x$ admet une et une seule solution β telle que $0,6 < \beta < 0,7$

b) Soit l'intervalle $I = [0,6 ; 0,7]$.
Démontrer que pour tout x de I, $h(x) \in I$ et $-0,9 < h'(x) < -0,8$

c) Soit u, la suite numérique définie par $u_0 = 0,6$
et, pour tout entier n, $u_{n+1} = h(u_n)$.
Démontrer que, pour tout entier n, $|u_{n+1} - \beta| \leq 0,9 |u_n - \beta|$
En déduire que, pour tout entier n, $|u_n - \beta| < (0,9)^n 0,1$

d) Démontrer que u converge vers β et que pour entier n, on a
$u_{2n} < \beta < u_{2n+1}$
Déterminer p tel que $|u_p - \beta| < 10^{-2}$. Préciser u_{p-1} et u_p.

3° On cherche à accélérer la convergence de la suite de limite β
Soit h_1, la fonction numérique telle que :
pour tout x réel, $h_1(x) = \frac{h(x)+0,8x}{1,8}$

a) Vérifier que l'équation $h(x) = x$ est équivalente à $h_1(x) = x$

b) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $I = [0,6 ; 0,7]$, $h_1(x) \in I$ et $-0,1 < h'_1(x) < 0$.

c) Soit v, la suite numérique définie par $v_0 = 0,6$
et pour tout entier n, $v_{n+1} = h_1(v_n)$
Démontrer que, pour tout entier n, $|v_n - \beta| < (0,1)^{n+1}$
Calculer v_4. Qu'en pensez-vous ?

4° Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-5} près et en déduire un encadrement de α.
Tracer (H) dans le même repère que (C).

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail